

**Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas:  
su evolución tras décadas de investigación**

**Conceptual and procedural knowledge in mathematics:  
their development after decades of research**

Ángela Castro  
Montserrat Prat  
Núria Gorgorió



IV CENTENARIO  
DE LA MUERTE DE  
CERVANTES

# Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación<sup>1</sup>

## Conceptual and procedural knowledge in mathematics: their development after decades of research

DOI: 10.4438/1988-592X-RE-2016-374-325

Ángela Castro  
Montserrat Prat  
Núria Gorgorió

*Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales. Facultad de Ciencias de la Educación.  
Universidad Autónoma de Barcelona*

### Resumen

La investigación en relación al conocimiento conceptual y al conocimiento procedimental en matemáticas ha sido tema de interés y foco de debate a lo largo de los años. En la literatura se encuentran discusiones que abordan desde qué debe desarrollarse en mayor medida en la escuela, si las habilidades o los procedimientos; hasta propuestas acerca de cómo deben estudiarse las interacciones entre ambos tipos de conocimiento. Este trabajo analiza la situación actual del campo a través de la revisión de las caracterizaciones más relevantes presentes en la literatura para ambos tipos de conocimiento, las razones que originaron cambios de enfoque en las investigaciones, las problemáticas actuales y las líneas abiertas de investigación. A su vez, se aporta un cuadro-resumen de

---

<sup>(1)</sup> La investigación que se presenta en este artículo ha sido desarrollada en el marco del proyecto de investigación «Caracterización del conocimiento disciplinar en matemáticas para el Grado de Educación Primaria: matemáticas para maestros» financiado por la Dirección General de Investigación (Ref. I+D EDU2013-4683-R). Los autores de la misma son miembros del Grupo de Investigación «Educatió Matemàtica i Context: Competència Matemàtica (EMiC:CoM)» reconocido y financiado por la Direcció General de Recerca, Generalitat de Catalunya (ref. 2014 SGR 00723).

los estudios más relevantes según cada tipo de conocimiento, poniendo el foco en el dominio matemático al que pertenecen. Las investigaciones consultadas sugieren que inicialmente los estudios sobre el conocimiento conceptual y procedimental se centraron en niños, extendiéndose posteriormente su estudio a adolescentes, adultos jóvenes y estudiantes para maestro. En un primer momento, las investigaciones sobre estos tipos de conocimiento se centraron esencialmente en los dominios de conteo, adición con uno y varios dígitos, fracciones y razonamiento proporcional; intentado en la mayoría de los casos, determinar el orden de adquisición de los conceptos versus habilidades. Con el transcurso de los años el interés por estos dos tipos de conocimiento se ha acrecentado, y su estudio se ha extendido hacia otros dominios matemáticos, como por ejemplo, las ecuaciones, principios de adición y la substracción, multiplicación y división. No obstante, se observa en este trabajo, que tras décadas de investigación no existe un consenso acerca de cómo definir y medir el conocimiento conceptual y procedimental con un grado suficiente de validez.

*Palabras clave:* conocimiento conceptual, conocimiento procedimental, flexibilidad procedimental, investigación en educación matemática, dominios matemáticos.

### **Abstract**

Investigations related to the conceptual and procedural knowledge in mathematics have been an object of interest and focus of debate throughout the years. In the literature is possible to find discussions that address from which should be further developed in school, if the skills or procedures; up to proposals about how to study interactions between both types of knowledge. This paper analyses the current situation in the field by reviewing the most relevant characterizations in the literature for both types of knowledge, the reasons that led to changes in research focus, the current problems and the open lines of research. In turn, contributes with a summary table of the most significant studies in the literature of each type of knowledge on focus on the mathematical domain to which they belong. The consulted research suggests that initially the studies about conceptual and procedural knowledge focused on children, and being later extended on adolescents, young adults and pre-service teachers. Initially, research on types of knowledge mainly focused on the counting domains, single-digit addition, multi-digit addition, fractions and proportional reasoning; trying in most cases, determine the acquisition order of the concepts versus skills. Over the years the interest in these two types of knowledge has increased, and its study has been extended to other mathematical domains, such as equations, principles of addition and subtraction, multiplication and division. Nevertheless, it is observed in this work that after decades of research there is no consensus about how to define and measure the conceptual and procedural knowledge with an adequate validity level.

**Keywords:** conceptual knowledge, procedural knowledge, procedural flexibility, research in mathematics education, mathematics domains.

Este trabajo espera promover la discusión entre los investigadores, sobre cómo abordar el estudio del conocimiento conceptual y procedimental, reconociendo los progresos y las dificultades asociadas a éste. Proporciona elementos para orientar la elaboración de instrumentos de evaluación de matemáticas, en pequeña o gran escala, como por ejemplo la elaboración de pruebas de diagnóstico escolares o de acceso a la universidad. Destaca la necesidad de considerar en la elaboración de dichos instrumentos las distintas dimensiones de los conocimientos a evaluar, reconociendo las relaciones existentes, así como las limitaciones en su medición.

## Introducción

Diferentes teorías del aprendizaje y la cognición postulan que nuestro comportamiento está determinado por al menos dos tipos diferentes de conocimiento. Uno proporciona una comprensión abstracta de los principios y las relaciones entre las piezas de conocimiento en un determinado dominio, y el otro permite resolver con eficacia y rapidez los problemas. Estos conocimientos, denominados respectivamente por la investigación actual como conocimiento conceptual y conocimiento procedimental, han sido ampliamente reconocidos y estudiados a través de los años desde los diferentes dominios matemáticos (Baroody, 2003; Schneider & Stern, 2005). En la literatura se encuentran diversas teorías que intentan explicar cómo se desarrollan e interactúan estos dos conocimientos, abordadas desde distintas perspectivas y que han sido objeto de intensos debates. Discusiones que van desde plantearse qué es más importante desarrollar y potenciar en la escuela, si las habilidades o los procedimientos, hasta como deberían estudiarse sus interacciones.

En un primer momento el estudio de ambos conocimientos se centraba especialmente en niños (Baroody & Gannon, 1984; Canobi, Reeve & Pattison, 1998, 2003; entre otros). Con el transcurso de los años este interés se ha acrecentado, incorporándose su estudio en adolescentes y adultos

jóvenes (Dubé, 2014; Dubé & Robinson, 2010; entre otros); y estudiantes para maestro (Chinnappan & Forrester, 2014; Groth & Bergner, 2006; entre otros). Extendiéndose finalmente hacia otros dominios matemáticos como la estadística, la estimación, y las ecuaciones, que no se incluían inicialmente (ver Tabla 1). Sin embargo, no se da en la literatura un acuerdo que permita describir con claridad qué es el conocimiento conceptual o el conocimiento procedimental.

En este artículo revisamos algunas de las caracterizaciones más relevantes para ambos tipos de conocimiento, así como las discusiones que originaron cambios de enfoque en la investigación. A su vez, presentamos en un cuadro las principales investigaciones en el campo, según el tipo de conocimiento en el que se centran y el dominio matemático al que pertenecen. Finalmente abordamos las problemáticas actuales y las líneas abiertas de investigación.

## **Caracterizaciones del conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental**

Tras décadas de investigación no parece haber un consenso para definir el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, ni tampoco para determinar cuál es la mejor manera de medirlos (Baroody, Feil & Johnson, 2007; Crooks & Alibali, 2014; Star, 2005). Esto se debe esencialmente a que ambos tipos de conocimiento se encuentran en un continuo, y no siempre pueden separarse (Hiebert & Lefevre, 1986; Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001). Posiblemente la visualización de estos conocimientos como un mismo continuo, que va desde el conocimiento escaso hasta el ricamente conectado, ha dado lugar a que la mayoría de los investigadores en educación matemática intenten distinguir entre tipo y calidad del conocimiento (Baroody, Feil & Johnson, 2007). Así, la diversidad de caracterizaciones presentes en el área puede ser un reflejo de las diferentes visiones que tienen los investigadores acerca de cómo las personas adquieren los procedimientos y conceptos (Star, 2005).

La revisión de las diferentes caracterizaciones de los términos conocimiento conceptual y conocimiento procedimental en matemáticas sugiere, que el conocimiento conceptual suele equipararse a un conocimiento profundo, ricamente conectado, flexible y asociado a

conocimiento significativo. Mientras que el conocimiento procedimental ha sido comúnmente asociado a un conocimiento escasamente conectado, automatizado y no profundo. En esta línea autores como Skemp (1978) y Bell, Costello y Küchemann (1983), entre otros, proporcionaron algunas aproximaciones a la distinción actual entre conocimiento conceptual y procedimental, pero el uso generalizado de estos términos se le atribuye Hiebert y Lefevre (1986), quienes proponen posiblemente una de las caracterizaciones más reconocidas y utilizadas en el área. Estos autores caracterizan el conocimiento conceptual como una rica red de relaciones entre piezas de información que permiten flexibilidad en el acceso y uso de la información (saber qué o porqué). El conocimiento procedimental, es descrito por Hiebert y Lefevre (1986) como un conocimiento compuesto por dos partes distintas. La primera de ellas, conformada por el lenguaje formal o el sistema de representación simbólico de las matemáticas. Mientras que, la segunda parte, se compone por los algoritmos o reglas utilizados para resolver las tareas matemáticas; instrucciones ejecutadas en una secuencia linealmente predeterminada, que paso a paso establecen como completar tareas (saber cómo).

La visión de Hiebert y Lefevre (1986) sobre estos conocimientos ha sido ampliamente recogida e interpretada a través de los años (Byrnes & Wasik, 1991; Carpenter, 1986; Groth & Bergner, 2006; entre otros). Así por ejemplo, encontramos diversas caracterizaciones que comparten las características descritas por Hiebert y Lefevre (1986), definiendo el conocimiento conceptual en términos de las interrelaciones entre las piezas de conocimiento, y la comprensión de los conceptos básicos (Byrnes y Wasik, 1991), o de los principios que gobiernan un dominio, de manera explícita o no (Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001). También, se ha asociado a la comprensión integral y funcional de las ideas matemáticas, destacándose que el grado de la comprensión conceptual de los alumnos está relacionado con la riqueza y el alcance de las conexiones que han establecido (Kilpatrick, Swafford y Findelli, 2001; Rittle-Johnson & Star, 2007). Estas caracterizaciones destacan el carácter flexible del conocimiento conceptual, que no está vinculado a problemas específicos, siendo ampliamente generalizable y, pudiendo ser o no ser verbalizable.

El conocimiento procedimental se ha descrito en términos de la habilidad para ejecutar secuencias de acción para resolver problemas, vinculado a problemas específicos y no ampliamente generalizable (Rittle-

Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Rittle-Johnson & Star, 2007). Este conocimiento es hasta cierto punto automatizado, por lo que su aplicación requiere de una atención consciente mínima. La automatización se logra a través de la práctica, lo que permitiría su rápida activación y ejecución. A su vez, este carácter automatizado implicaría que este conocimiento no es, o sólo es parcialmente abierto a la inspección consciente, siendo difícilmente verbalizado o transformado en procesos mentales superiores, lo que explicaría por qué sólo está ligado a tipos de problemas específicos (Schneider y Stern, 2005).

Hay autores que rechazan la idea de la superficialidad del conocimiento procedimental, caracterizada por la operacionalidad y secuencialidad con que se ha descrito tradicionalmente, argumentado que el tipo de conocimiento y la calidad de éste deben ser tratados como dimensiones independientes. Posiblemente uno de los mayores defensores de la llamada reconceptualización del conocimiento procedimental es Star (2000, 2002, 2005, 2007). Star (2005) defiende la idea de que el uso popular de estos términos confunde tipos de conocimiento con propiedades o cualidades que pueden caracterizarlos. Este autor sostiene que el punto final de la adquisición de conceptos es cuando el estudiante comprende, conociendo los hechos o principios, utilizándolos para realizar tareas como reconocer, identificar, explicar, evaluar, juzgar, entre otras. Por el contrario, el punto final de la adquisición de los procedimientos es cuando las habilidades se convierten en rutina y pueden ejecutarse con fluidez, es decir, cuando un conocimiento concreto se ha automatizado. Para este autor el término conocimiento conceptual ha llegado a abarcar no sólo el conocimiento de los conceptos, sino también la forma en que los conceptos pueden ser conocidos. Star (2000, 2005, 2007) señala que hay alguna evidencia que sugiere que el conocimiento procedimental profundo existe, como un conocimiento abstracto, pero no conceptual. Star (2005) propone definir estos tipos de conocimiento separando ambas dimensiones, argumentando que ambos pueden tener una calidad profunda o superficial.

Para Baroody, Feil y Johnson (2007) algunos educadores matemáticos han sido culpables, sin pretenderlo, de simplificar excesivamente el uso de los términos conocimiento procedimental o habilidades computacionales, asociándolos con el conocimiento memorizado por



repetición. Estos autores coinciden con Star (2005) en que debe considerarse específica y cuidadosamente estos constructos, destacando que la profundidad procedimental y el conocimiento conceptual no pueden estar separados. Baroody, Feil y Johnson (2007) sugieren que si bien puede existir de manera parcial conocimiento conceptual y procedimental superficial independientes, el conocimiento procedimental profundo sólo existe con un conocimiento conceptual profundo y viceversa, Estos autores proponen un esquema que ilustra a través del modelo de la *adaptive expertise*, las conexiones o mútua dependencia entre ambos tipos de conocimientos; y una reconceptualización para ambos constructos. Definiendo el conocimiento procedimental como las acciones o manipulaciones mentales que incluyen reglas, estrategias y algoritmos para completar una tarea. Mientras que el conocimiento conceptual se define como el conocimiento acerca de los hechos, generalizaciones y principios.

Posiblemente el carácter significativo de las relaciones establecidas entre las piezas de conocimiento que caracterizan al conocimiento conceptual, ha dado lugar a que éste se asocie con el conocimiento significativo. Mientras que el carácter operacionalizado y secuencial con que ha sido comúnmente caracterizado el conocimiento procedimental, ha ocasionado que se relacione con el aprendizaje memorístico. No obstante, tal como lo señalan Rittle-Johnson y Schneider (2014), la definición del conocimiento conceptual como un conocimiento ricamente conectado, ha avanzado hacia un pensamiento más recientemente que ha visto la riqueza de conexiones como una característica del conocimiento conceptual que aumenta con la experiencia; sugiriendo definirlo en términos del conocimiento de los conceptos.

La descripción del conocimiento procedimental como la habilidad de ejecutar secuencias de acción (procedimientos) para resolver problemas, es una visión predominante en investigaciones del pasado (Rittle-Johnson & Schneider, 2014). Aunque no parece haber un consenso sobre la existencia de un conocimiento procedimental profundo, desde hace algunos años las investigaciones han comenzado a abordar el conocimiento procedimental desde una perspectiva diferente, incorporando el estudio de la flexibilidad procedimental (Star & Seifert, 2006; Rittle-Johnson & Star, 2007; Berk, Taber, Carrino & Poetzl, 2009, entre otros). La habilidad procedimental ha sido definida en términos del conocimiento de múltiples maneras de resolver problemas y el



conocimiento de cuándo utilizarlo (Kilpatrick et al., 2001); o como la habilidad para emplear múltiples métodos de solución, resolver el mismo problema utilizando distintos métodos, y elegir estratégicamente entre los métodos más eficientes. Así, un solucionador flexible tiene un conocimiento de varios procedimientos de resolución, y la capacidad de inventar o innovar para crear nuevos procedimientos (Star & Seifert, 2006). Otros estudios, han propuesto diferenciar procesos y procedimientos. En esta línea Gray y Tall (1991; 1994) introducen la noción de *Procept*, como la amalgama del proceso y el concepto representado por el mismo símbolo, señalando que los pensadores más flexibles ven un símbolo tanto como un proceso para hacer las matemáticas como un concepto que pensar; mientras que los pensadores menos flexibles, sólo lo ven como un proceso para llevar a cabo.

## Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: primeras teorías

Inicialmente las investigaciones en el área abordaron la disyuntiva comprensión versus habilidades en el contexto de los programas de instrucción. Los esfuerzos se dirigían a determinar qué se debía desarrollar y enseñar en la escuela (Hiebert & Lefevre, 1986), afectando la organización y la clasificación de los contenidos curriculares, como por ejemplo, los contenidos y secuencias de actividades propuestas en los libros de texto y en la instrucción (e.g. ver en Brownell, 1935; Bruner, 1960; Gagné, 1968). Los defensores de las habilidades frente a los conceptos, postulaban que el foco de la instrucción debía asegurar la memorización de las habilidades computacionales, y no cultivar la comprensión matemática de los conceptos (e.g. Drill Theory en Baroody, 2003). Por otro lado, estaban quienes abogaban por la comprensión de los conceptos, defendiendo que el foco de la instrucción debía fomentar la comprensión conceptual, y no la memorización de las habilidades básicas (e.g. Incidental-Learning Theory en Baroody, 2003).

Mientras algunos investigadores dedicaban sus esfuerzos en determinar si debían promoverse los conceptos o las habilidades, otros apuntaban hacia una postura intermedia en la cual la enseñanza de las matemáticas debía centrarse en la promoción significativa de las

habilidades (e.g. Meaning Theory en Baroody, 2003). Así, durante el último cuarto del siglo XX, el interés por determinar si los conceptos son más importantes que los procedimientos fue reemplazado por la discusión sobre su orden de adquisición, apareciendo dos puntos de vista teóricos que dominaron el debate, *conceptos primero* en oposición a *procedimientos primero* (Baroody, 2003).

Las *Concepts-First Theories* sugerían que los niños inicialmente adquieren o desarrollan la comprensión de los conceptos. El conocimiento de los conceptos se utiliza para generar y seleccionar los procedimientos necesarios para la resolución de problemas en un determinado dominio (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Rittle-Johnson, Siegler & Star, 2011; Schneider & Stern, 2005); y a partir de la práctica se obtiene el conocimiento procedimental del concepto. Algunas de las investigaciones empíricas, con orientaciones cognitivas o curriculares, que proporcionaron evidencias para sustentar esta teoría son: en el dominio del conteo las investigaciones de Gelman y Meck (1983; 1986) y Wynn (1990); en resolución de problemas de adición y substracción, las de Briars y Larkin (1984) y Riley, Greeno y Heller (1983); en la adición de un sólo dígito, las de Siegler y Crowley (1994) y Cowan y Renton (1996), entre otros. Las *Procedures-First Theories* sugerían que el desarrollo de las habilidades precede y subyace al desarrollo de los conceptos; proponiendo que los niños inicialmente adquieren las habilidades en un dominio específico, siendo a partir de la reflexión de la práctica como de manera gradual se adquiere el conocimiento conceptual abstracto (Baroody, 2003; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Schneider & Stern, 2005). Investigaciones como las de Baroody y Gannon (1984); Briars y Siegler (1984); Fuson (1988); Frye, Braisby, Lowe, Maroudas & Nicholls (1989); Siegler (1991); Siegler y Stern (1998); entre otras, proporcionaron evidencias empíricas que soportaron esta teoría.

Rittle-Johnson y Siegler (1998) tras una revisión de la literatura sobre el tema, concluyen que de manera general a pesar de que hay evidencias que en algunos dominios, el desarrollo de los conceptos precede al desarrollo de los procedimientos (e.g. razonamiento proporcional, la adición de fracciones y la adición de un sólo dígito); en otros dominios las habilidades preceden a los conceptos (e.g. conteo y la multiplicación de fracciones). Rittle-Johnson y colaboradores (Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson y Siegler, 1998; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001) señalaron que las *Concepts-First Theories* y las *Procedures-First*

*Theories* se equivocan, criticando las afirmaciones acerca de que un tipo de conocimiento precede a otro. Estos autores señalan tres factores que amenazan la validez de los resultados obtenidos en estas investigaciones, y que podrían explicar estas diferencias: la naturaleza del conocimiento temprano, el impacto de la experiencia previa y las limitaciones metodológicas. Rittle-Johnson y colaboradores concluyen que no hay un orden fijo en el desarrollo de las habilidades en comparación con la comprensión de los conceptos. Esta visión contribuye a un cambio de enfoque en el estudio de los conocimientos conceptual y procedimental.

## **Relaciones entre el conocimiento conceptual y procedimental: el cambio de enfoque**

Diferentes autores han argumentado que el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental no se desarrollan independientemente entre sí. En un inicio estos dos tipos de conocimiento fueron vistos como entidades separadas, ya fuera compitiendo por su atención para la instrucción o coexistiendo como vecinos disjuntos (Hiebert & Lefevre, 1986). Con el transcurso de los años el debate sobre ellos avanzó hacia un punto de vista más moderado, en el que los procedimientos y los conceptos pueden estar relacionados; originando un cambio de sentido en la manera de abordar las investigaciones sobre estos tipos de conocimiento y su desarrollo.

### **El modelo iterativo**

Para Rittle-Johnson y Alibali (1999) los conocimientos conceptual y procedimental no se desarrollan independientemente, sugiriendo la existencia de relaciones bidireccionales entre éstos que se desarrollan gradualmente. Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001) argumentan que estos conocimientos se influyen mutuamente durante todo su desarrollo, proponiendo la existencia de un modelo iterativo, donde incrementos de un tipo de conocimiento conducen a incrementos en el otro que gatilla nuevos conocimientos en el primero. Bajo este modelo, el aumento en el conocimiento conceptual puede conducir a generación de procesos; y, el conocimiento procedimental puede conducir a ganancias en la comprensión conceptual, que sucesivamente pueden conducir a más incrementos en el primero; pudiendo no ser equivalentes.

El modelo iterativo se sustenta en investigaciones en el dominio de la aritmética (e.g. Baroody & Ginsburg, 1986; Byrnes, 1992; Byrnes & Wasik, 1991; Canobi, 2009; Canobi & Bethune 2008; Hiebert & Wearne, 1996), la equivalencia matemática (e.g. Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson & Siegler, 1998); y el ámbito de las fracciones (e.g. Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001), entre otras. En estos estudios, se destaca que la vinculación entre estos tipos de conocimientos puede beneficiar la adquisición y aplicación de ambos conocimientos (Baroody, 2003). Así, la construcción significativa de relaciones entre el conocimiento conceptual y los procedimientos –mediante secuencias de instrucción y/o a partir del conocimiento previo– puede beneficiar al conocimiento procedimental pues contribuye a recordar los procedimientos, favorece su uso efectivo, permite adaptar los procedimientos existentes en función de las demandas del problema; o influye en la generación de nuevos procedimientos. Por su parte, el conocimiento procedimental puede influir en la comprensión conceptual, mejorando la representación de problemas, incrementando la disponibilidad de recursos mentales, la identificación de conceptos erróneos y la reflexión acerca de las causas que hacen que los procedimientos funcionen (Baroody, 2003; Hiebert & Lefevre 1986; Rittle-Johnson & Alibali, 1999; y Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001).

Estos estudios han aportado ideas clave sobre el potencial de las relaciones entre ambos conocimientos, pero también han puesto en evidencia que la forma en que se desarrolla esta relación es poco clara.

### **Investigaciones centradas en las relaciones entre ambos conocimientos**

Describir cómo interactúan el conocimiento conceptual y el procedimental es fundamental para comprender cómo se produce el desarrollo del conocimiento, así como para mejorar la instrucción (Rittle-Johnson & Schneider, 2014).

Inicialmente, los estudios sobre estos conocimientos se centraron esencialmente en los dominios de conteo, adición con uno y varios dígitos, fracciones y razonamiento proporcional; intentado principalmente determinar el orden de adquisición de los conceptos versus habilidades (ver en Rittle-Johnson & Siegler, 1998). Con el transcurso de los años se ha extendido su estudio hacia otros dominios matemáticos, como las ecuaciones, equivalencia, principios de la adición y la substracción, multiplicación y división; y, en menor medida en dominios como la estimación, la estadística y la densidad (ver Tabla I).

**TABLA I.** Estudios sobre el conocimiento conceptual y procedimental por dominio.

Dominio	C. Conceptual	C. Procedimental	Ambos
General	Crooks y Alibali (2014)	Star (2005; 2007)	Baroody (2003) Baroody, Feil y Johnson (2007) Bisanz y LeFevre (1992) Hiebert y LeFevre (1986) Carpenter (1986) Rittle-Johnson y Siegler (1998) Rittle-Johnson y Schneider (2014) Star (2000) Star y Stylianides (2000) Verschaffel, Luwel, Torbeyns y Van Dooren (2009)
Conteo	Crooks y Alibali (2014)		Baroody y Ginsburg (1986) Briars y Siegler (1984) Frye, Braisby, Lowe, Maroudas, y Nicholls (1989) Gelman y Meck (1983; 1986) Lefevre et al., (2006) Rittle-Johnson y Siegler (1998) Siegler (1991) Wynn (1990)
Adición / Sustracción con uno y/o varios dígitos		Fayol y Thevenot (2012)	Baroody y Ginsburg (1986) Canobi (2009) Canobi y Bethure (2008) Hiebert y Wearne (1996) Peled y Segalis (2005) Rittle-Johnson y Siegler (1998) Siegler y Araya (2005)
Propiedades de la adición y/o la sustracción	Baroody y Lai (2007) Canobi, Reeve y Pattison (2002) Crooks y Abali (2014) Dubé y Robinson (2010) Robinson y Dubé (2009) Robinson y Ninowski (2003) Robinson, Ninowski y Gray (2006)	Siegler y Stern (1998)	Baroody y Gannon (1984) Baroody y Ginsburg (1986) Baroody, Torbeyns y Verschaffel (2009) Baroody, Lai, Li y Baroody (2009) Bisanz, Watchorn, Piatt y Sherman (2009) Bryant, Christie y Rendu (1999) Canobi (2004; 2005; 2009) Canobi y Bethure (2008) Canobi, Reeve y Pattison (1998; 2003) Cowan y Renton (1996) Dubé (2014) Farrington-Flint, Canobi, Wood y Faulkner (2007) Gilmore y Bryant (2006; 2008) Gilmore y Spelke (2008) Gilmore y Papadatou- Pastou (2009) Patel y Canobi (2010) Prather y Alibali (2009) Robinson y LeFevre (2012) Siegler y Araya (2005) Siegler y Crowley (1994) Schneider (2012) Schneider y Stern (2009)

Dominio	C. Conceptual	C. Procedimental	Ambos
Ecuaciones		Rittle-Johnson, Star y Durkin (2012) Star (2002) Star y Newton (2009) Star y Seifert (2006)	Prather y Alibali (2011) Rittle-Johnson y Star (2007; 2009) Rittle-Johnson, Star y Durkin (2009) Schneider, Rittle-Johnson y Stern (2011)
Fracciones	Hech, Close y Santini (2003)		Bailey et al., (2015) Byrnes y Wasik (1991) Chinnappan y Forrester (2014) Hallett, Nunes y Bryant (2010) Hallett, Nunes, Bryant y Thorpe (2012) Peled y Segalis (2005) Rayner, Pitsoulantis y Osana (2009) Rittle-Johnson y Siegler (1998) Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001) Schneider y Stern (2005; 2010)
Equivalencia	Crooks y Alibali (2014)		Matthews y Rittle-Johnson (2009) Rittle-Johnson y Alibali (1999)
Resolución Problemas	Oyarzún y Salvo (2010)	Briars y Larkin (1984)	Blöte, Van der Burg y K lein (2001) Riley, Greeno y Heller (1983)
Densidad	Schneider y Hardy (2000)		
Multipliación y división	Dubé y Robinson (2010a, b) Robinson y Ninowski (2003) Robinson, Ninowski y Gray (2006)	Fayol y Thevenot (2012) Rittle-Johnson y Kmicikewyck (2008)	Dubé (2014) Robinson y LeFevre (2012)
Decimales			Peled y Segalis (2005) Rittle-Johnson y Koedinger (2009)
Estadística			Groth y Bergner (2006)
Estimación			LeFevre, Greenham y Waheed (1993) Star y Rittle-Johnson (2009)
Razonamiento proporcional		Berk, Taber, Carrino y Poetzl (2009)	Dixon y Moore (1996) Rittle-Johnson y Siegler (1998)
Álgebra		Blessing y Anderson (1996)	
Cálculo mental			Blöte, Klein, Beishuizen (2000)
Enteros			Byrnes (1992)

Fuente: Elaboración propia

Las interacciones entre concepto-procedimiento han sido analizadas esencialmente desde dos perspectivas, la resolución de problemas y las secuencias de instrucción. También existen, en menor medida, investigaciones que estudian el desarrollo de estos conocimientos individualmente, ya sea reconociendo y considerando la existencia de los vínculos entre ambos tipos de conocimiento (e.g. Blöte, Klein, & Beishuizen, 2000; Hech, Close & Santini, 2003; Star & Seifter, 2006) o no (e.g. Blessing & Anderson, 1996).

Desde la resolución de problemas en el dominio de los principios de la adición, se han analizado las relaciones entre las habilidades de procedimiento en la resolución de problemas de suma, y el conocimiento conceptual de algunos principios de la adición, como la conmutatividad, asociatividad e inversión, entre otros (e.g. Canobi, 2004, 2005; Canobi & Bethune, 2008; Canobi, Reeve & Pattison, 1998, 2003; Farrington-Flint, Canobi, Wood and Faulkner, 2007; Gilmore & Bryant, 2006, 2008; Pastel & Canobi, 2010). En estos estudios el conocimiento conceptual ha sido evaluado a través de juicios y justificación de tareas, y del uso de las relaciones parte-todo para resolver los problemas. La habilidad de resolución de problemas ha sido evaluada a través de los repertorios de procedimientos, velocidad y precisión. De aquí se han derivado diferentes perfiles de comprensión conceptual y habilidad aritmética en los niños que intentan dar cuenta de cómo se desarrolla este proceso. Ante los resultados obtenidos, la diversidad de perfiles de conocimiento identificados en los niños ha sido interpretada como una muestra de la complejidad en las relaciones parte-todo que los niños entienden, y la existencia de diferentes rutas de desarrollo (Canobi, 2004, 2005; Canobi, Reeve & Pattison, 1998, 2003). Señalándose que algunas veces los niños desarrollan una comprensión conceptual con ausencia de la habilidad competente, y que estas diferencias sugieren que para la mayoría de los niños la comprensión conceptual y la habilidad computacional se desarrollan juntas, mientras que para otros no es así (Gilmore & Bryant, 2006, 2008; Gilmore & Papadatpu-Pastou, 2009). Sugiriéndose también que la comprensión conceptual de los niños y sus habilidades procedimentales están en gran parte no relacionadas, al menos en algunos puntos durante su desarrollo (Schneider & Star, 2009).

Los estudios que evalúan la implementación de secuencias de instrucción, centran la atención en la forma en la que un ciclo de aprendizaje, generalmente centrado en un tipo de conocimiento, podría



facilitar el cambio del otro conocimiento. En esta línea se han analizado los efectos de la instrucción en la comprensión de números de varios dígitos y la habilidad computacional (Hiebert & Wearne, 1996); los efectos de la instrucción basada conceptualmente en el desarrollo de la flexibilidad de los procedimientos de adición y sustracción (Blöte, Van der Burg & Klein, 2001); los beneficios de una secuencia iterativa, en comparación con una secuencia de conceptos antes que procedimientos, sobre valor posicional decimal y procedimientos aritméticos (Rittle-Johnson & Koedinger, 2009); entre otros. Los resultados en este tipo de estudios sugieren generalmente las secuencias son una buena fuente para potenciar las relaciones entre ambos conocimientos y facilitar su desarrollo. Se sugiere que la práctica de problemas secuenciada basada conceptualmente en principios de la adición, mejora la capacidad de los niños para ampliar su aprendizaje procesual a los nuevos problemas y conduce a una mejora en la capacidad de verbalizar conceptos clave (Canobi, 2009); o que una secuencia iterativa entre conceptos y procedimientos puede promover el aumento de los procedimientos correctos, conducir a una mejor recuperación del conocimiento y apoyar su integración (Rittle-Johnson & Koedinger, 2009). Si bien en este tipo de estudios el conocimiento tiende a evaluarse con tareas de pre y post test, en ocasiones puede ser necesario algún tipo de conocimiento previo para beneficiarse plenamente de las lecciones del otro (Rittle-Johnson & Koedinger, 2009). Es importante considerar que para valorar las interacciones entre el conocimiento conceptual y procedimental a través de las secuencias de instrucción, es difícil hacerlo de forma independiente.

## Investigaciones actuales y líneas abiertas

Pese a los avances en el área en relación al estudio del conocimiento conceptual y procedimental, la revisión realizada sugiere que existen puntos de desacuerdo, que continúan siendo foco de debate, como la dificultad de definir y medir ambos tipos de conocimiento. La variedad de caracterizaciones presentes en la literatura y las tareas utilizadas para medirlos, que no siempre son acordes a cómo estos conocimientos se han definido, hace que sea difícil comprender los principales hallazgos, las formas en que estos conocimientos se relacionan, y determinar la

forma más eficaz de utilizar la investigación para guiar las prácticas de enseñanza (Crooks y Alibali, 2014).

Aunque el conocimiento conceptual y procedimental no siempre pueden separarse, su distinción es útil para comprender mejor el desarrollo del conocimiento (Rittle-Johnson & Schneider, 2014). El conocimiento conceptual caracterizado como un conocimiento rico y complejo se ha evaluado a través de un gran número de tareas que incluyen la utilización tanto de indicadores de conocimiento conceptual explícito -como las definiciones de los conceptos- o implícito -como la evaluación, juicio, justificación y aplicación de procedimientos- (Canobi, 2005; Canobi & Bethure, 2008; entre otros). La evaluación del conocimiento procedimental, caracterizado tradicionalmente como un conocimiento operacionalizado y secuenciado, se ha vuelto relativamente estandarizada, existiendo menor variabilidad en las tareas usadas para medirlo (Rittle-Johnson & Schneider, 2014). Para evaluar el conocimiento procedimental, los participantes suelen resolver un conjunto de problemas, evaluados en base a su velocidad, precisión, o el repertorio de procedimientos específicos que utilizan para llegar a sus respuestas (Canobi, Reeve, & Pattison, 1998; LeFevre et al, 2006; Schneider & Stern, 2010, entre otros). Mayoritariamente las tareas procedimentales son familiares para los participantes, mientras que sólo algunas veces incluyen el reconocimiento de que un procedimiento desconocido y adaptaciones pertinentes, o variaciones para afrontar el nuevo problema (Rittle-Johnson & Schneider, 2014).

La visión de los investigadores acerca de los conocimientos conceptual y procedimental, puede tener repercusiones importantes en los resultados obtenidos, ya que pueden afectar la naturaleza de las relaciones entre ambos conocimientos (Gilmore & Papadatpu-Pastou, 2009). Para Rittle-Johnson y Schneider (2014) actualmente no se han desarrollado enfoques estandarizados para evaluar estos conocimientos con una validez, fiabilidad y objetividad comprobadas. Estamos de acuerdo con estos autores, en que esta situación resulta problemática ya que el conocimiento almacenado en la memoria, tiene que ser deducido de la conducta manifiesta. No obstante, el comportamiento humano surge de la compleja interacción de multitud de procesos cognitivos y generalmente no refleja fehacientemente el contenido de la memoria. Las investigaciones futuras deben considerar cuidadosamente estos constructos, examinando como estos conocimientos son

operacionalizados y medidos, proporcionando evidencias de la validez de las medidas, y especificando modelos más exhaustivos que mejoren su comprensión (Baroody, Feil & Johnson, 2007; Rittle-Johnson & Schneider, 2014; Star, 2007).

Crooks y Alibali (2014) hacen un esfuerzo por ofrecer una caracterización del conocimiento conceptual que engloba en gran parte las caracterizaciones anteriores. Estas autoras dividen el conocimiento conceptual en dos tipos de conocimiento y establecen indicadores de evaluación para ambos. Consideran el conocimiento conceptual como: (i) el conocimiento de los principios generales, que incluye reglas, definiciones, conexiones y los aspectos de la estructura del dominio; y (ii) el conocimiento de los principios subyacentes a los procedimientos, que implica saber por qué ciertos procedimientos funcionan para determinados problemas, cuál es el propósito de cada paso de un procedimiento, conocer las conexiones entre estos pasos y sus fundamentos conceptuales.

Otra cuestión a considerar es la falta de investigaciones en otros dominios matemáticos, así como en otros niveles educativos (Star, 2000), que continúan desarrollándose esencialmente en la escuela primaria. Desde hace algunos años se ha empezado a incluir su estudio en adolescentes, adultos y futuros maestros. No obstante, se requiere mayor investigación en el área para poder contrastar los resultados obtenidos y obtener teoría útil que ayude a desentrañar la complejidad de estos tipos de conocimiento y sus relaciones.

Finalmente, conviene señalar el progreso logrado en la comprensión del desarrollo de estos conocimientos en los últimos 15 años. Para Rittle-Johnson y Schneider (2014) un paso importante a desarrollar es un modelo más amplio de las relaciones entre conceptos y procedimientos, profundizando en la manera cómo estos conocimientos se almacenan de forma independiente en la memoria a largo plazo; cómo ocurre este cambio con la experiencia; cómo la edad y las diferencias individuales impactan en las relaciones entre estos conocimientos; y, el estudio de la eficacia de los diferentes métodos de enseñanza; entre otros aspectos.

## Referencias bibliográficas

- Bailey, D., Zhou, X., Zhang, Y., Cui, J., Fuchs, L., Jordan, N., Gersten, R., & Siegler, R. (2015). Development of fraction concepts and procedures in US and Chinese children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 129, 68-83.
- Baroody, A. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. Baroody & A. Dowker (Eds), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise* (pp. 1- 33). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Baroody, A., Feil, Y., & Johnson, A. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 115–131.
- Baroody, A., & Gannon, K. (1984). The development of the commutativity principle and economical addition strategies. *Cognition and Instruction*, 1, 321–339.
- Baroody, A., & Ginsburg, P. (1986): The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics* (pp.75-112). Hillsdale, NJ: Lawrence Associate.
- Baroody, A., & Lai, M. (2007). Preschoolers' understanding of the addition–subtraction inversion principle: A Taiwanese sample. *Mathematical Thinking and Learning*, 9, 131–171.
- Baroody, A., Lai, M., Li, X., & Baroody, A. E. (2009). Preschoolers' understanding of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 41-60.
- Baroody, A., Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2009). Young children's understanding and application of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 2-9.
- Bell, A., Costello, J. & Küchemann, D. (1983). Research on learning and teaching. *A Review of Research in Mathematical Education*. Windsor: NFER-Nelson.
- Berk, D., Taber, S., Carrino, C., & Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(3), 113-135.
- Bisanz, J., & LeFevre, J. (1992). Understanding elementary mathematics. *Advances in Psychology*, 91, 113-136.

- Bisanz, J., Watchorn, R., Piatt, C., & Sherman, J. (2009). On "Understanding" children's developing use of inversion. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 10-24.
- Blessing, S., & Anderson, J. (1996). How people learn to skip steps. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 22(3), 576-598.
- Blöte, A., Klein, A., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction*, 10, 221-247.
- Blöte, A., Van der Burg, E., & Klein, A. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology*, 93(3), 627-638.
- Briars, D., & Larkin, J. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, 1, 245-296.
- Briars, D., & Siegler, R. (1984). A featural analysis of preschoolers' counting knowledge. *Developmental Psychology*, 20(4), 607-618.
- Brownell, W. A., & Chazal, C. B. (1935). The effects of premature drill in third-grade arithmetic. *The Journal of Educational Research*, 29(1), 17-28.
- Bruner, J. (1960). *The Process of Education: A Searching Discussion of School Education Opening New Paths to Learning and Teaching*. New York: Vintage Books.
- Byrnes, J. (1992). The conceptual basis of procedural learning. *Cognitive Development*, 7, 235- 257
- Byrnes, J., & Wasik, B. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology*, 27(5), 777-786.
- Bryant, P., Christie, C., & Rendu, A. (1999). Children's understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, identity, and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74(3), 194-212.
- Canobi, K. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development*, 19, 81-93.
- Canobi, K. (2005). Children's profiles of addition and subtraction understanding. *Journal of Experimental Child Psychology*, 92, 220-246.
- Canobi, K. (2009). Concept-procedure interactions in children's addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102, 131-149.

- Canobi, K., & Bethune, N. (2008). Number words in young children's conceptual and procedural knowledge of addition, subtraction and inversion. *Cognition*, 108, 675– 686.
- Canobi, K., Reeve, R., & Pattison, P. (1998). The Role of Conceptual Understanding in Children's Addition Problem Solving. *Developmental Psychology*, 34(5), 882-891.
- Canobi, K., Reeve, R., & Pattison, P. (2002). Young Children's Understanding of Addition Concepts. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, 22(5), 513-532.
- Canobi, K., Reeve, R., & Pattison, P. (2003). Patterns of Knowledge in Children's Addition. *Developmental Psychology*, 39(3), 521-534.
- Carpenter, T. (1986). Conceptual knowledge as foundation for procedural knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp.113-132). Hillsdale. NJ:Lawrence Associates.
- Chinnappan, M., & Forrester, T. (2014). Generating procedural and conceptual knowledge of fractions by pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 871-896.
- Cowan, R., & Renton, M. (1996). Do they know what they are doing? Children's use of economical addition strategies and knowledge of commutativity. *Educational Psychology*, 16, 407-420.
- Crooks, N., Alibali, M. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review*; 34(4), 344-377.
- Dixon, J., & Moore, F. (1996). The development of intuitive principles in choosing mathematical strategies. *Developmental Psychology*, 32, 241-253.
- Dubé, A. (2014). Adolescents' understanding of inversion and associativity. *Learning and Individual Differences*, 36, 49-59.
- Dubé, A., & Robinson, K. (2010). The relationship between adults' conceptual understanding of inversion and associativity. *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale*, 64(1), 60-66.
- Fayol, M., & Thevenot, C. (2012). The use of procedural knowledge in simple addition and subtraction problems. *Cognition*, 123(3), 392-403.
- Farrington-Flint, L., Canobi, K. H., Wood, C., & Faulkner, D. (2007). The role of relational reasoning in children's addition concepts. *British Journal of Developmental Psychology*, 25(2), 227-246.

- Fuson, K. (1988). *Children's counting and concepts of number*. Springer-Verlag Publishing.
- Frye, D., Braisby, N., Lowe, J., Maroudas, C., & Nicholls, J. (1989). Young children's understanding of counting and cardinality. *Child Development*, 60, 1158-1171.
- Gagné, R.M. (1968). Contributions of Learning to human Development. *Psychological Review*, 75, 177-191.
- Gelman, R., & Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: Principles before skill. *Cognition*, 13, 343-359.
- Gelman, R., & Meck, E. (1986). The Notion of Principle: The Case of Counting. In Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case for Mathematics* (pp. 29-57). Hillsdale. N.J: Erlbaum.
- Gilmore, C., & Bryant, P. (2006). Individual differences in children's understanding of inversion and arithmetical skill. *British Journal of Educational Psychology*, 76, 309-331.
- Gilmore, C., & Bryant, P. (2008). Can children construct inverse relations in arithmetic? Evidence for individual differences in the development of conceptual understanding and computational skill. *British Journal of Developmental Psychology*, 26(3), 301-316.
- Gilmore, C., & Papadatou-Pastou, M. (2009). Patterns of individual differences in conceptual understanding and arithmetical skill: A meta-analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 25-40.
- Gilmore, C. & Spelke, E. (2008). Children's understanding of the relationship between addition and subtraction. *Cognition*, 107(3), 932-945.
- Gray, E.M., & Tall, D.O. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. *Proceedings of PME XV*, vol. II, pp. 72-79. Assisi, Italy.
- Gray, E.M., & Tall, D.O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 116-140.
- Groth, R., & Bergner, J. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(1), 37-63.
- Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102(2), 395-406.



- Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P., & Thorpe, C. (2012). Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113(4), 469-486.
- Hecht, S., Close, L., & Santisi, M. (2003). Sources of individual differences in fraction skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 86(4), 277-302.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986): Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics* (pp.1-27). Hillsdale, NJ:Lawrence Associates.
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, 14(3), 251– 283.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- LeFevre, J., Greenham, S., & Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction*, 11(2), 95-132.
- LeFevre, J., Smith-Chant, B., Fast, L., Skwarchuk, S., Sargla, E., Arnup, J., Penner-Wilger, M., Bisanz, J., & Kamawar, D. (2006). What counts as knowing? The Development of conceptual and procedural knowledge of counting from kindergarten through grade 2. *Journal of Experimental Child Psychology*, 93(4), 285–303.
- Matthews, P., & Rittle-Johnson, B. (2009). In pursuit of knowledge: Comparing self-explanations, concepts, and procedures as pedagogical tools. *Journal of Experimental Child Psychology*, 104(1), 1-21.
- Oyarzún, C., & Salvo, S. (2010). Conocimiento conceptual y dificultades en la resolución de problemas verbales aritméticos en el nivel inicial. *Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, 9(18), 13-33.
- Patel, P., & Canobi, K. (2010). The role of number words in preschoolers' addition concepts and problem-solving procedures. *Educational Psychology*, 30(2), 107-124.
- Peled, I., & Segalis, B. (2005). It's not too late to conceptualize: Constructing a generalized subtraction schema by abstracting and connecting procedures. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(3), 207–230.

- Prather, R., & Alibali, M. (2009). The development of arithmetic principle knowledge: How do we know what learners know? *Developmental Review*, 29(4), 221-248.
- Prather, R., & Alibali, M. (2011). Children's acquisition of arithmetic principles: The role of experience. *Journal of Cognition and Development*, 12(3), 332-354.
- Rayner, V., Pitsolantis, N., & Osana, H. (2009). Mathematics anxiety in preservice teachers: Its relationship to their conceptual and procedural knowledge of fractions. *Mathematics Education Research Journal*, 21(3), 60-85.
- Riley, M., Greene, J., & Heller, J. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. Ginsberg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press.
- Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175.
- Rittle-Johnson, B., & Kmicikewycz, A. (2008). When generating answers benefits arithmetic skill: The importance of prior knowledge. *Journal of Experimental Child Psychology*, 101(1), 75-81.
- Rittle-Johnson, B., & Koedinger, K. (2009). Iterating between lessons concepts and procedures can improve mathematics knowledge. *British Journal of Educational Psychology*, 79, 483-500.
- Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2014). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. To appear in R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition*. Oxford University Press.
- Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), *The Development of Mathematical Skills* (pp.75-110). Hove, United Kingdom: Psychology Press.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R., & Alibali, M. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346.
- Rittle-Johnson, B., & Star, J. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, 99(3), 561-574.

- Rittle-Johnson, B., & Star, J. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101(3), 529.
- Rittle-Johnson, B., Star, J., & Durkin, K. (2009). The importance of prior knowledge when comparing examples: Influences on conceptual and procedural knowledge of equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101(4), 836-852.
- Rittle-Johnson, B., Star, J., & Durkin, K. (2012). Developing procedural flexibility: Are novices prepared to learn from comparing procedures? *British Journal of Educational Psychology*, 82(3), 436-455.
- Robinson, K., & Dubé, A. (2009). Children's understanding of addition and subtraction concepts. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103(4), 532-545.
- Robinson, K., & LeFevre, J. (2012). The inverse relation between multiplication and division: Concepts, procedures, and a cognitive framework. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 409-428.
- Robinson, K., & Ninowski, J. (2003). Adults' understanding of inversion concepts: How does performance on addition and subtraction inversion problems compare to performance on multiplication and division inversion problems? *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale*, 57(4), 321-330.
- Robinson, K., Ninowski, J., & Gray, M. (2006). Children's understanding of the arithmetic concepts of inversion and associativity. *Journal of Experimental Child Psychology*, 94(4), 349-362.
- Siegler, R. (1991). In young children's counting, procedures precede principles. *Educational Psychology Review*, 3(2), 127-135.
- Siegler, R., & Araya, R. (2005). A computational model of conscious and unconscious strategy discovery. *Advances in Child Development and Behavior*, 33, 1-42.
- Siegler, R., & Crowley, K. (1994). Constraints on learning in nonprivileged domains. *Cognitive Psychology*, 27(2), 194-226.
- Siegler, R., & Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology: General*, 127(4), 377-397.
- Schneider, M. (2012). Commentary 2: knowledge integration in mathematics learning: the case of inversion. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 447-453.

- Schneider, M., & Hardy, I. (2000). Profiles of inconsistent knowledge in children's pathways of conceptual change. *Developmental Psychology*, 49(9), 1639-1649.
- Schneider, M., Rittle-Johnson, B., & Star, J. (2011). Relations Among Conceptual Knowledge, Procedural Knowledge, and Procedural Flexibility in Two Samples Differing in Prior Knowledge. *Developmental Psychology*, 47(6), 1525-1538.
- Schneider, M., & Stern, E. (2005). Conceptual and procedural knowledge of a mathematics problem: Their measurement and their causal interrelations. In B. G. Bara, L. Barsalou, & M. Bucciarelli (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (pp. 341-347). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Schneider, M., & Stern, E. (2009). The inverse relation of addition and subtraction: A knowledge integration perspective. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 92-101.
- Schneider, M., & Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: A multimethod approach. *Developmental Psychology*, 46(1), 178-192.
- Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3), 9-15.
- Star, J. (2000). On the relationship between knowing and doing in procedural learning. In B. Fishman & S. O'Connor-Divelbiss (Eds.), *Fourth international conference of the learning sciences* (pp. 80-86). Michigan.
- Star, J. (2002). Re-conceptualizing procedural knowledge: The emergence of intelligent performances among equation solvers. In D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant & K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 999-1007). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Star, J. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404-411.
- Star, J. (2007). Foregrounding procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education* 38(2), 132-135.
- Star, J., & Newton, K. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM: International Journal of Mathematics Education*, 41(5), 557-567.

- Star, J., & Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102(4), 408-426.
- Star, J., & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology*, 31(3), 280-300.
- Star, J., & Stylianides, G. (2000). Procedural and conceptual knowledge: exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(2), 169-181.
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24(3), 335-359.
- Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition*, 36(2), 155-193.

**Dirección de contacto:** Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad Autónoma de Barcelona, 08193 Bellaterra (Barcelona), España. E-mail: a.castro.inostroza@gmail.com

# Conceptual and procedural knowledge in mathematics: their development after decades of research<sup>1</sup>

## Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación

DOI: 10.4438/1988-592X-RE-2016-374-325

Ángela Castro  
Montserrat Prat  
Núria Gorgorió

*Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales. Facultad de Ciencias de la Educación.  
Universidad Autónoma de Barcelona*

### Abstract

Research on conceptual and procedural knowledge in mathematics has been an object of interest and focus of debate throughout the years. In the literature it is possible to find discussions that address topics ranging from which should be further developed in school –the skills or the procedures– to proposals about how to study interactions between both types of knowledge. This paper analyses the current situation in the field by reviewing the most relevant characterisations in the literature for both types of knowledge, the reasons that led to changes in research focus, the current problems and the open lines of research. In turn, it contributes a summary-table of the most significant studies in the literature of each type of knowledge focusing on the mathematical domain to which they belong. The papers consulted suggest that early studies about conceptual and

---

<sup>(1)</sup> This work has been supported by the Research Project «Caracterización del conocimiento disciplinar en matemáticas para el Grado de Educación Primaria: matemáticas para maestros» funded by the Dirección General de Investigación (Ref. I+D EDU2013-4683-R). The authors belong to the Research Group «Educació Matemàtica i Context: Competència Matemàtica (EMiC:CoM)» recognized and funded by the Direcció General de Recerca, Generalitat de Catalunya (ref. 2014 SGR 00723).

procedural knowledge focused on children, while later they spread to adolescents, young adults and pre-service teachers. Initially, research on types of knowledge mainly focused on the counting domains, single- and multi-digit addition, fractions and proportional reasoning; trying, in most cases, to determine the acquisition order of the concepts versus skills. Over the years, the interest in these two types of knowledge has increased, and its study has spread to other mathematical domains, such as equations, principles of addition and subtraction, multiplication and division. Nevertheless, it is observed in this work that, after decades of research, there is no consensus about how to define and measure the conceptual and procedural knowledge with an adequate validity level.

*Keywords:* conceptual knowledge, procedural knowledge, procedural flexibility, research on mathematics education, mathematical domains.

### Resumen

La investigación en relación al conocimiento conceptual y al conocimiento procedimental en matemáticas ha sido tema de interés y foco de debate a lo largo de los años. En la literatura se encuentran discusiones que abordan desde qué debe desarrollarse en mayor medida en la escuela, si las habilidades o los procedimientos; hasta propuestas acerca de cómo deben estudiarse las interacciones entre ambos tipos de conocimiento. Este trabajo analiza la situación actual del campo a través de la revisión de las caracterizaciones más relevantes presentes en la literatura para ambos tipos de conocimiento, las razones que originaron cambios de enfoque en las investigaciones, las problemáticas actuales y las líneas abiertas de investigación. A su vez, se aporta un cuadro-resumen de los estudios más relevantes según cada tipo de conocimiento, poniendo el foco en el dominio matemático al que pertenecen. Las investigaciones consultadas sugieren que inicialmente los estudios sobre el conocimiento conceptual y procedimental se centraron en niños, extendiéndose posteriormente su estudio a adolescentes, adultos jóvenes y estudiantes para maestro. En un primer momento, las investigaciones sobre estos tipos de conocimiento se centraron esencialmente en los dominios de conteo, adición con uno y varios dígitos, fracciones y razonamiento proporcional; intentado, en la mayoría de los casos, determinar el orden de adquisición de los conceptos versus habilidades. Con el trascurso de los años el interés por estos dos tipos de conocimiento se ha acrecentado, y su estudio se ha extendido hacia otros dominios matemáticos, como por ejemplo, las ecuaciones, principios de adición y la substracción, multiplicación y división. No obstante, se observa en este trabajo, que tras décadas de investigación no existe un consenso acerca de cómo definir y medir el conocimiento conceptual y procedimental con un grado suficiente de validez.

*Palabras clave:* conocimiento conceptual, conocimiento procedimental, flexibilidad procedimental, investigación en educación matemática, dominios matemáticos.



This paper expects to foster discussion among researchers on how to approach the study of conceptual and procedural knowledge, while also recognizing the progresses and difficulties associated to it. It provides elements to guide the preparation of assessment instruments for mathematics, on a larger or a smaller scale, such as for instance the preparation of diagnostic tests for schools or university access. We should remark the need to consider the different dimensions of the knowledge to assess in the preparation of such instruments while acknowledging the existing relationships as well as the limitations in measurement.

## Introduction

Different learning and cognition theories claim that our behaviour is determined by at least two types of knowledge. One provides an abstract understanding of the principles and relationships between the pieces of knowledge in a specific domain, while the other allows us to solve problems rapidly and efficiently. These types of knowledge, named respectively as conceptual knowledge and procedural knowledge by current research, have been widely acknowledged and studied throughout the years from the different mathematical domains (Baroody, 2003; Schneider & Stern, 2005). In the literature we can find several theories attempting to explain how these two types of knowledge develop and interact. These theories have been approached from different perspectives, the object of intense debate. Discussions that range from wondering what is more important to develop and encourage in school –the skills or the procedures– to how their interactions should be studied.

Early on, the study of both types of knowledge focused mainly on children (Baroody & Gannon, 1984; Canobi, Reeve & Pattison, 1998, 2003; among others). Over the years, though, this interest has increased, and adolescents and the study has incorporated young adults (Dubé, 2014; Dubé & Robinson, 2010; among others) and also pre-service teachers (Chinnappan & Forrester, 2014; Groth & Bergner, 2006; among others). Lastly, it has spread to other mathematical domains such as statistics, estimation, and equations, which were not included initially (see Table 1). However, there is no consensus in the literature to help us clearly describe what conceptual knowledge or procedural knowledge are.

In this article we will review some of the most relevant characterizations for both types of knowledge as well as the discussions that triggered the changes in focus in research. In turn, we will present a chart with the main studies in the field according to the type of knowledge they focus on and the mathematical domain they belong to. Lastly, we will approach the current problems and the open research lines.

## Characterisations of conceptual and procedural knowledge

After decades of research there seems to be no consensus to define either conceptual knowledge or procedural knowledge, or to determine the best way to measure them (Baroody, Feil & Johnson, 2007; Crooks & Alibali, 2014; Star, 2005). This is basically due to the fact that both types of knowledge are in a continuum and cannot always be separated (Hiebert & Lefevre, 1986; Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001). Perhaps visualizing these types of knowledge as a continuum – covering from scarce to richly connected knowledge – has led most researchers in mathematical education to trying to distinguish between type and quality of knowledge (Baroody, Feil & Johnson, 2007). Therefore, the diversity in the characterizations found in the field may be a reflection of the different views the researchers have on how persons acquire procedures and concepts (Star, 2005).

A revision of these characterizations suggests that conceptual knowledge is usually likened to deep, richly connected, flexible knowledge associated to significant knowledge. On the other hand, procedural knowledge has been commonly linked to scarcely connected, automatized, superficial knowledge. In this line authors such as Skemp (1978) and Bell, Costello and Küchemann (1983), among others, have provided a few approaches to the current distinction between conceptual and procedural knowledge. However the generalized use of these terms is attributed to Hiebert and Lefevre (1986), who proposed possibly one of the most renowned characterizations in the field. These authors characterized conceptual knowledge as a rich network of relationships between pieces of information that grant flexibility to access and the use of information (knowing what or why). Procedural knowledge is described by Hiebert and Lefevre (1986) as knowledge made up of two

different parts. The first one comprises formal language or the symbolic system of representation of mathematics. The second one, comprises the algorithms or rules used to solve mathematical tasks – instructions run in a linearly predetermined sequence which determine step by step how to complete tasks (knowing how).

The view of Hiebert and Lefevre (1986) on these types of knowledge has been widely reflected on and interpreted throughout the years (Byrnes & Wasik, 1991; Carpenter, 1986; Groth & Bergner, 2006; among others). For example, we can find several characterizations sharing the characteristics described by Hiebert and Lefevre (1986), who defined conceptual knowledge in terms of the interrelations between the pieces of knowledge and the understanding of the basic concepts (Byrnes and Wasik, 1991), or the principles that rule a domain, explicitly or not (Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001). It has also been linked to the integral and functional understanding of mathematical ideas; it has been highlighted that the students' degree of conceptual understanding is related to the richness and range of the connections they have established (Kilpatric, Swafford and Findelli, 2001; Rittle-Johnson & Star, 2007). These characterizations underline the flexibility of conceptual knowledge, which is unrelated to specific problems and is widely generalizable and may be verbalizable or not.

Procedural knowledge has been described as the skills to run action sequences to solve problems, as related to specific problems and non-widely generalizable (Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Rittle-Johnson & Star, 2007). This knowledge is automatized to a certain extent, for which reason it takes minimum conscious attention to apply. Automation is attained through practice, which would grant its rapid activation and execution. In turn, this automatized character would imply that this type of knowledge is not open – or only partially open – to conscious inspection, which makes it difficult to verbalize it or transform it into higher mental processes. This would explain why it is only linked to specific problems (Schneider & Stern, 2005).

Certain authors disagree with the notion of the superficiality of procedural knowledge, traditionally characterized as operational and sequential. It has been argued that the type and quality of the knowledge must be treated as independent dimensions. Star is possibly one of the greatest advocates of the so-called reconceptualization of procedural

knowledge (2000, 2002, 2005, 2007). Star (2005) defends the idea that the popular use of these terms confuses types of knowledge with the properties or qualities that may characterize them. This author claims that the final stage of concept acquisition occurs when the student understands the facts or principles, knows them, uses them to conduct tasks such as recognizing, identifying, explaining, assessing, or judging, among others. On the other hand, the final stage of procedure acquisition occurs when skills become routine and can be executed fluently, that is, when specific knowledge has become automatized. For this author, the term conceptual knowledge has come to cover not only the knowledge of concepts, but also the way concepts can be known. Star (2000, 2005, 2007) points to some evidence suggesting that deep procedural knowledge exists, as abstract knowledge, but not conceptual. Star (2005) proposed to define these types of knowledge by separating both dimensions, arguing that both can have a deep or superficial quality.

For Baroody, Feil and Johnson (2007), certain mathematical educators are – unintentionally – guilty of oversimplifying the use of the terms procedural knowledge or computational skills, often linking them to knowledge memorized by repetition. These authors agree with Star (2005) on the fact that these constructs should be specifically and carefully considered, while they underline that procedural depth and conceptual knowledge cannot exist by themselves. Baroody, Feil and Johnson (2007) suggest that, while partial, superficial, conceptual and procedural knowledge may exist independently, deep procedural knowledge also exists along deep conceptual knowledge and vice versa. These authors propose an outline that displays – by means of the *adaptive expertise* model – the connections or mutual dependence between both types of knowledge, as well as a reconceptualization for both constructs. It describes procedural knowledge as the mental actions or manipulations which include rules, strategies, and algorithms to complete a task; whereas conceptual knowledge is defined as the knowledge about the facts, generalizations and principles.

Possibly because of the significance of the relationships established between the pieces of knowledge characterizing conceptual knowledge, it has been linked to significant knowledge. On the other hand, because of the operationalized and sequential traits that have commonly characterized procedural knowledge, it has been linked to rote learning. However, as Rittle-Johnson and Schneider pointed out (2014), the

definition of conceptual knowledge as richly connected knowledge has evolved towards to a line of thinking which has recently begun to see the richness of connections as a characteristic of conceptual knowledge that increases with experience; thus suggesting to define it in terms of the knowledge of concepts.

Describing procedural knowledge as the ability to run action sequences (procedures) to solve problems has been a predominant view in past research (Rittle-Johnson & Schneider, 2014). Although there seems to be no consensus on the existence of deep procedural knowledge, in recent years, studies have begun to approach procedural knowledge from a different perspective by incorporating the study of procedural flexibility (Star & Seifert, 2006; Rittle-Johnson & Star, 2007; Berk, Taber, Carrino & Poetzl, 2009, among others). Procedural ability has been defined as the knowledge of multiple ways to solve problems and the knowledge of when to use it (Kilpatrick et al., 2001); or as the ability to use multiple methods of solution, solving the same problem by using different methods, and choosing strategically from among the most efficient methods. Accordingly, a flexible solver knows several resolution procedures and the ability to invent or innovate in order to create new ones (Star & Seifert, 2006). Other studies have proposed distinguishing processes and procedures. In this line, Gray and Tall (1991; 1994) introduced the notion of *Procept* as the amalgam of the process and the knowledge represented by the same symbol, pointing out that the most flexible thinkers see a symbol as well as a process to make mathematics into a concept to be thought; whereas the least flexible thinkers only see it as a process to be conducted.

## Conceptual and procedural knowledge in mathematics: first theories

Early research in the field approached the ‘understanding versus skills’ dilemma within the context of instruction programmes. Efforts were being put into determining what had to be developed and taught in school (Hiebert & Lefevre, 1986), thus affecting the organization and classification of curricular contents such as, for example, the contents and sequences of activities proposed in textbooks and instruction (e.g. see Brownell, 1935; Bruner, 1960; Gagné, 1968). The advocates of skills versus concepts claimed that the focus of instruction had to guarantee the

memorization of computational skills, and not cultivate the mathematical understanding of concepts (e.g. Drill Theory in Baroody, 2003). On the other hand, there were others who advocated for understanding the concepts, claiming that the focus of instruction had to encourage conceptual understanding and not the memorization of basic skills (e.g. Incidental-Learning Theory in Baroody, 2003).

While some researchers devoted their efforts to deciding whether to encourage concepts or skills, others pointed towards an intermediate position where teaching mathematics should focus on the significant encouragement of skills (e.g. Meaning Theory in Baroody, 2003). Accordingly, during the last quarter of the 20<sup>th</sup> century, the interest in deciding if concepts were more important than procedures was replaced by the discussion on their order of acquisition. Two theoretical points of view ruled the debate, *concepts first* versus *procedures first* (Baroody, 2003).

*Concepts-First* theories suggested that children acquire or develop the understanding of concepts early on. The knowledge of concepts is used to generate and select the necessary procedures to solve problems in a specific domain (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Rittle-Johnson, Siegler & Star, 2011; Schneider & Stern, 2005). The procedural knowledge of the concept is obtained from practice. These are some of the – cognitive- or curricular-oriented – empirical studies which provided evidence to support this theory: in the counting domain, the studies by Gelman and Meck (1983; 1986) and Wynn (1990); in adding and subtracting problem solving, Briars and Larkin (1984) and Riley, Greeno and Heller (1983); in single-digit addition, Siegler and Crowley (1994) and Cowan and Renton (1996), among others. On the other hand, *Procedures-First* theories suggested that the development of skills precedes and underlies the development of concepts, thus proposing that children acquire the specific skills of a specific domain early on, whereas they acquire abstract conceptual knowledge gradually from the reflection of practice (Baroody, 2003; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001; Schneider & Stern, 2005). Studies such as Baroody and Gannon (1984); Briars and Siegler (1984); Fuson (1988); Frye, Braisby, Lowe, Maroudas & Nicolls (1989); Siegler (1991); and Siegler and Stern (1988), among others, provided empirical evidence to support this theory.

Rittle-Johnson and Siegler (1998), after a literature review on the topic, concluded that, in general, despite the evidence that, in certain domains, the development of concepts precedes the development of procedures (e.g. proportional reasoning, fraction addition, and single-digit addition),

in other domains skills precede concepts (e.g. counting and multiplication of fractions). Rittle-Johnson and colleagues (Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson and Siegler, 1998; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001) pointed out that *Concepts-First* theories and *Procedures-First* theories were wrong, and they criticized the claims about one type of knowledge preceding the other. These authors pointed to three factors threatening the validity of the results obtained in these studies which could explain these differences: the nature of early knowledge, the impact of previous experience, and methodological limitations. Rittle-Johnson and colleagues concluded that there is no fixed order in the development of skills as compared to the understanding of concepts. This view contributed to a change of approach in the study of conceptual and procedural knowledge.

## Relationships between conceptual and procedural knowledge: the change of approach

Different authors have argued that conceptual knowledge and procedural knowledge do not develop independently from one another. Early on these two types of knowledge were seen as separate entities, either competing for attention for instruction or coexisting as separate neighbours (Hiebert & Lefevre, 1986). Over the years, the debate about them shifted to a more moderate point of view, where procedures and concepts can be related. This brought about a change of direction in the way to approach research about these types of knowledge and their development.

### The iterative model

For Rittle-Johnson and Alibali (1999), conceptual knowledge and procedural knowledge do not develop independently, thus suggesting the existence of bi-directional relationships between them which develop gradually. Rittle-Johnson, Siegler and Alibali (2001) argue that these types of knowledge influence one another during their development. Accordingly they put forth the existence of an iterative model where increases in one type of knowledge lead to increases in the other, which triggers new knowledge in the former. Under this model, an increase in conceptual knowledge may lead to generating processes; while procedural knowledge may lead to profits in conceptual understanding,



which may subsequently lead to further (not necessarily equivalent) increases in the former.

The iterative model is supported on studies in the domain of arithmetic (e.g. Baroody & Ginsburg, 1986; Byrnes, 1992; Byrnes & Wasik, 1991; Canobi, 2009; Canobi & Bethune, 2008; Hiebert & Wearne, 1996), mathematical equivalence (e.g. Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson & Siegler, 1998), and fractions (e.g. Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001), among others. In these studies, it is stressed that the link between these two types of knowledge can benefit the acquisition and application of both types of knowledge (Baroody, 2003). Accordingly, the significant construction of relationships between conceptual knowledge and procedures – by means of instruction sequences and/or from previous knowledge – can benefit procedural knowledge as it helps remember the procedures, it favours its effective use, it allows us to adapt the existing procedures according to the problem's demands, and it influences the generation of new procedures. For its part, procedural knowledge can influence on conceptual understanding, thus improving problem representation, increasing the availability of mental resources, the identification of wrong concepts, and the reflection of the causes that make procedures work (Baroody, 2003; Hiebert & Lefevre, 1986; Rittle-Johnson & Alibali, 1999; and Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001).

These studies have supplied key ideas on the potential of the relationships between both types of knowledge, but they have also revealed that the way this relationship develops is unclear.

### **Studies focused on the relationships between both types of knowledge**

Describing how conceptual and procedural knowledge interact is essential to understand how the development of knowledge occurs, as well as to improve instruction (Rittle-Johnson & Schneider, 2014).

Early on, studies on these types of knowledge focused mainly on the domains of counting, single- and multiple-digit addition, fractions, and proportional reasoning; while trying mostly to determine the order of acquisition of concepts versus skills (see Rittle-Johnson & Siegler, 1998). Over the years, the focus of the studies has spread to other mathematical domains such as equations; equivalence; principles of addition, subtraction, multiplication, and division; and to a lesser extent, domains such as estimation, statistics and density (see Table I).

**TABLE I.** Studies on conceptual and procedural knowledge by mathematical domain.

Domain	Conceptual K.	Procedural K.	Both
General	Crooks and Alibali (2014)	Star (2005; 2007)	Baroody (2003) Baroody, Feil and Johnson (2007) Bisanz and LeFevre (1992) Hiebert and LeFevre (1986) Carpenter (1986) Rittle-Johnson and Siegler (1998) Rittle-Johnson and Schneider (2014) Star (2000) Star and Stylianides (2000) Verschaffel, Luwel, Torbeyns and Van Dooren (2009)
Counting	Crooks and Alibali (2014)		Baroody and Ginsburg (1986) Briars and Siegler (1984) Frye, Braisby, Lowe, Maroudas, and Nicholls (1989) Gelman and Meck (1983; 1986) Lefevre et al., (2006) Rittle-Johnson and Siegler (1998) Siegler (1991) Wynn (1990)
Single-digit and/or multiple-digit addition / subtraction		Fayol and Thevenot (2012)	Baroody and Ginsburg (1986) Canobi (2009) Canobi and Bethure (2008) Hiebert and Wearne (1996) Peled and Segalis (2005) Rittle-Johnson and Siegler (1998) Siegler and Araya (2005)
Properties of addition and/or subtraction	Baroody and Lai (2007) Canobi, Reeve and Pattison (2002) Crooks and Abali (2014) Dubé and Robinson (2010) Robinson and Dubé (2009) Robinson and Ninowski (2003) Robinson, Ninowski and Gray (2006)	Siegler and Stern (1998)	Baroody and Gannon (1984) Baroody and Ginsburg (1986) Baroody, Torbeyns and Verschaffel (2009) Baroody, Lai, Li and Baroody (2009) Bisanz, Watchorn, Piatt and Sherman (2009) Bryant, Christie and Rendu (1999) Canobi (2004; 2005; 2009) Canobi and Bethure (2008) Canobi, Reeve and Pattison (1998; 2003) Cowan and Renton (1996) Dubé (2014) Farrington-Flint, Canobi, Wood and Faulkner (2007) Gilmore and Bryant (2006; 2008) Gilmore and Spelke (2008) Gilmore and Papadatou- Pastou (2009) Patel and Canobi (2010) Prather and Alibali (2009) Robinson and LeFevre (2012) Siegler and Araya (2005) Siegler and Crowley (1994) Schneider (2012) Schneider and Stern (2009)

Domain	Conceptual K.	Procedural K.	Both
Equations		Rittle-Johnson, Star and Durkin (2012) Star (2002) Star and Newton (2009) Star and Seifert (2006)	Prather and Alibali (2011) Rittle-Johnson and Star (2007; 2009) Rittle-Johnson, Star and Durkin (2009) Schneider, Rittle-Johnson and Stern (2011)
Fractions	Hech, Close and Santini (2003)		Bailey et al., (2015) Byrnes and Wasik (1991) Chinnappan and Forrester (2014) Hallett, Nunes and Bryant (2010) Hallett, Nunes, Bryant and Thorpe (2012) Peled and Segalis (2005) Rayner, Pitsolantis and Osana (2009) Rittle-Johnson and Siegler (1998) Rittle-Johnson, Siegler and Alibali (2001) Schneider and Stern (2005; 2010)
Equivalence	Crooks and Alibali (2014)		Matthews and Rittle-Johnson (2009) Rittle-Johnson and Alibali (1999)
Problem Solving	Oyarzún and Salvo (2010)	Briars and Larkin (1984)	Blöte, Van der Burg and Klein (2001) Riley, Greeno and Heller (1983)
Density	Schneider and Hardy (2000)		
Multiplication and division	Dubé and Robinson (2010a, b) Robinson and Ninowski (2003) Robinson, Ninowski and Gray (2006)	Fayol and Thevenot (2012) Rittle-Johnson and Kmicikewyck (2008)	Dubé (2014) Robinson and LeFevre (2012)
Decimals			Peled and Segalis (2005) Rittle-Johnson and Koedinger (2009)
Statistics			Groth and Bergner (2006)
Estimation			LeFevre, Greenham and Waheed (1993) Star and Rittle-Johnson (2009)
Proportional Reasoning		Berk, Taber, Carrino and Poetzel (2009)	Dixon and Moore (1996) Rittle-Johnson and Siegler (1998)
Algebra		Blessing and Anderson (1996)	
Mental Calculation			Blöte, Klein and Beishuizen (2000)
Integers			Byrnes (1992)

Source: Compiled by the authors

Concept-procedure interactions have been analysed from two perspectives mainly: problem solving and instruction sequences. There are also research – to a lesser extent – studying the development of these types of knowledge individually, either acknowledging and considering the existence of the bonds between them (e.g. Blöte, Klein & Beishuizen, 2000; Hech, Close & Santini, 2003; Star & Seifter, 2006) or not (e.g. Blessing & Anderson, 1996).

From the perspective of problem solving in the domain of the principles of addition, relationships have been analysed between the procedure skills in addition problem solving and the conceptual knowledge of some principles of addition such as commutativity, associativity, and inversion, among others (e.g. Canobi, 2004, 2005; Canobi & Bethune, 2008; Canobi, Reeve & Pattison, 1998, 2003; Farrington-Flint, Canobi, Wood and Faulkner, 2007; Gilmore & Bryant, 2006, 2008; Pastel & Canobi, 2010). In these studies, conceptual knowledge has been evaluated through task justification and judgment and through the use of part-whole relationships to solve problems. The problem-solving skill has been evaluated through the repertoires of procedures, speed and precision. Different conceptual comprehension and arithmetic skill profiles in children have originated from this trying to account for the way this process occurs. In light of the results obtained, the diversity of knowledge profiles identified in children has been interpreted as a sign of the complexity in the part-whole relationship children understand, and the existence of different routes of development (Canobi, 2004, 2005; Canobi, Reeve & Pattison, 1998, 2003). It has been pointed out that children sometimes develop conceptual comprehension without the competent skill, and that these differences suggest that, for most children, conceptual comprehension and computational skills develop together, while for others it does not (Gilmore & Bryant, 2006, 2008; Gilmore & Papadatpu-Pastou, 2009). It has also been suggested that the conceptual comprehension of children and their procedural skills are – to a large extent – unrelated, at least in certain points during its development (Schneider & Star, 2009).

Studies evaluating the implementation of instruction sequences focus their attention on the way a learning cycle – usually focused on one type – might facilitate the change of the other type of knowledge. In this line, the following aspects have been analysed: the effects of instruction on the understanding of multiple-digit numbers and computational skills

(Hiebert & Wearne, 1996); the effects of instruction based conceptually on the development of the flexibility of addition and subtraction procedures (Blöte, Van der Burg & Klein, 2001); and the benefits of an iterative sequence – as compared to a concepts-before-procedures sequence – on decimal positional value and arithmetic procedures (Rittle-Johnson & Koedinger, 2009); among others. Results in these types of studies generally suggest that sequences are a good source to foster the relationships between both types of knowledge and thus facilitate their study. It is suggested that sequenced problem practice conceptually based on principles of addition improves the children's capacity to enlarge their processual learning to the new problems and it leads to a better capacity to verbalize key concepts (Canobi, 2009). It is also suggested that an iterative sequence between concepts and procedures can encourage an increase of correct procedures, lead to a better retrieval of knowledge and support their integration (Rittle-Johnson & Koedinger, 2009). While knowledge in these types of studies tends to be evaluated with pre- and post-test tasks, it may occasionally be necessary to use some type of previous knowledge to fully benefit from the other's lessons (Rittle-Johnson & Koedinger, 2009). It is important to consider that, when assessing the interactions between conceptual and procedural knowledge through instruction sequences, it is difficult to do so independently.

## Current research and open lines

Despite breakthroughs in the field regarding the study of conceptual and procedural knowledge, the review we have conducted points to the existence of some disagreements which are still the focus of debate, such as the difficulty to define and measure both types of knowledge. The variety of characterizations found in the literature and the tasks used to measure them, which do not always agree with how these types of knowledge have been defined, makes it difficult to understand the main findings, the ways these types of knowledge interrelate, and to determine the most efficient way to use research to guide teaching practices (Crooks & Alibali, 2014).

Even though conceptual and procedural knowledge cannot always be separated, it is useful to distinguish them in order to understand the development of knowledge better (Rittle-Johnson & Schneider, 2014).

Conceptual knowledge characterized as rich, complex knowledge has been evaluated through a large number of tasks including the use of both explicit – such as the concepts' definitions – and implicit conceptual knowledge indicators – such as evaluation, judgement, justification and application of procedures (Canobi, 2005; Canobi & Bethure, 2008; among others). The evaluation of procedural knowledge – traditionally characterized as operationalized, sequenced knowledge – has become relatively standardized, whereas there are fewer tasks to measure it (Rittle-Johnson & Schneider, 2014). To evaluate procedural knowledge, the participants usually solve a set of problems evaluated according to speed, precision or the repertoire of specific procedures to obtain their responses (Canobi, Reeve & Pattison, 1998; LeFevre et al., 2006; Schneider & Stern, 2010, among others). The participants are familiar with most procedural tasks, whereas only certain times do they comprise the acknowledgment of an unknown procedure and pertinent adaptations, or variations to face the new problem (Rittle-Johnson & Schneider, 2014).

The view of researchers regarding conceptual and procedural knowledge may have important repercussions on the results obtained, as they can affect the nature of the relationships between both types of knowledge (Gilmore & Papadatpu-Patsou, 2009). For Rittle-Johnson and Schneider (2014), no standardized approaches have so far been developed to evaluate these types of knowledge with proven validity, reliability and objectivity. We agree with these authors on the fact that this is a difficult situation as the knowledge stored in memory must be deduced from conduct. However, human behaviour comes from the complex interaction of numerous cognitive processes and it does not generally reflect the content of memory reliably. Future studies should carefully consider these constructs, and they should examine the way these types of knowledge are operationalized and measured while providing evidence of the validity of the measures and specifying more thorough models for better understanding (Baroody, Feil & Johnson, 2007; Rittle-Johnson & Schneider, 2014; Star, 2007).

Crooks and Alibali (2014) made an effort to offer a characterization of conceptual knowledge comprising a large part of the previous characterizations. These authors divided conceptual knowledge into two types of knowledge and established evaluation indicators for both of them. They consider conceptual knowledge as: (i) the knowledge of general principles, which comprises rules, definitions, connections and

the aspects related to the domain's structure; and (ii) the knowledge of the principles underlying procedures, which involves knowing why certain procedures work for certain problems, what the purpose of each step of a procedure is, knowing the links between these steps and their conceptual fundamentals.

Another question to bear in mind is the lack of studies in other mathematical domains as well as in other educational levels (Star, 2000). Research is still mostly conducted on primary school. In recent years, adolescents, young adults and pre-service teachers have begun to be included in research. However, further research is needed in the field so that it is possible to contrast the results obtained and achieve useful theory to help untangle the complexity of these types of knowledge and their relationships.

Lastly, we would like to highlight the progress achieved in understanding the development of these types of knowledge in the last 15 years. For Rittle-Johnson and Schneider (2014), it would be an important step to develop a wider model of the relationships between concepts and procedures while delving into the way these types of knowledge are stored independently in long-term memory; how this change occurs with experience; how age and individual differences impact the relationships between these types of knowledge; and the study of the efficacy of the different teaching methods; among other aspects.

## References

- Bailey, D., Zhou, X., Zhang, Y., Cui, J., Fuchs, L., Jordan, N., Gersten, R., & Siegler, R. (2015). Development of fraction concepts and procedures in US and Chinese children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 129, 68-83.
- Baroody, A. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. Baroody & A. Dowker (Eds), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing Adaptive Expertise* (pp. 1- 33). Mahwah, NJ: Erlbaum.



- Baroody, A., Feil, Y., & Johnson, A. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38, 115–131.
- Baroody, A., & Gannon, K. (1984). The development of the commutativity principle and economical addition strategies. *Cognition and Instruction*, 1, 321–339.
- Baroody, A., & Ginsburg, P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics* (pp.75-112). Hillsdale, NJ: Lawrence Associate.
- Baroody, A., & Lai, M. (2007). Preschoolers' understanding of the addition–subtraction inversion principle: A Taiwanese sample. *Mathematical Thinking and Learning*, 9, 131–171.
- Baroody, A., Lai, M., Li, X., & Baroody, A. E. (2009). Preschoolers' understanding of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 41-60.
- Baroody, A., Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2009). Young children's understanding and application of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 2-9.
- Bell, A., Costello, J. & Küchemann, D. (1983). Research on learning and teaching. *A Review of Research in Mathematical Education*. Windsor: NFER-Nelson.
- Berk, D., Taber, S., Carrino, C., & Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(3), 113-135.
- Bisanz, J., & LeFevre, J. (1992). Understanding elementary mathematics. *Advances in Psychology*, 91, 113-136.
- Bisanz, J., Watchorn, R., Piatt, C., & Sherman, J. (2009). On “Understanding” children's developing use of inversion. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 10-24.
- Blessing, S., & Anderson, J. (1996). How people learn to skip steps. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 22(3), 576-598.
- Blöte, A., Klein, A., & Beishuizen, M. (2000). Mental computation and conceptual understanding. *Learning and Instruction*, 10, 221-247.
- Blöte, A., Van der Burg, E., & Klein, A. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology*, 93(3), 627-638.

- Briars, D., & Larkin, J. (1984). An integrated model of skill in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, 1, 245-296.
- Briars, D., & Siegler, R. (1984). A featural analysis of preschoolers' counting knowledge. *Developmental Psychology*, 20(4), 607-618.
- Brownell, W. A., & Chazal, C. B. (1935). The effects of premature drill in third-grade arithmetic. *The Journal of Educational Research*, 29(1), 17-28.
- Bruner, J. (1960). *The Process of Education: A Searching Discussion of School Education Opening New Paths to Learning and Teaching*. New York: Vintage Books.
- Byrnes, J. (1992). The conceptual basis of procedural learning. *Cognitive Development*, 7, 235- 257
- Byrnes, J., & Wasik, B. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology*, 27(5), 777-786.
- Bryant, P., Christie, C., & Rendu, A. (1999). Children's understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, identity, and decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74(3), 194-212.
- Canobi, K. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive Development*, 19, 81-93.
- Canobi, K. (2005). Children's profiles of addition and subtraction understanding. *Journal of Experimental Child Psychology*, 92, 220-246.
- Canobi, K. (2009). Concept-procedure interactions in children's addition and subtraction. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102, 131-149.
- Canobi, K., & Bethune, N. (2008). Number words in young children's conceptual and procedural knowledge of addition, subtraction and inversion. *Cognition*, 108, 675- 686.
- Canobi, K., Reeve, R., & Pattison, P. (1998). The Role of Conceptual Understanding in Children's Addition Problem Solving. *Developmental Psychology*, 34(5), 882-891.
- Canobi, K., Reeve, R., & Pattison, P. (2002). Young Children's Understanding of Addition Concepts. *Educational Psychology: An International Journal of Experimental Educational Psychology*, 22(5), 513-532.
- Canobi, K., Reeve, R., & Pattison, P. (2003). Patterns of Knowledge in Children's Addition. *Developmental Psychology*, 39(3), 521-534.

- Carpenter, T. (1986). Conceptual knowledge as foundation for procedural knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp.113-132). Hillsdale. NJ:Lawrence Associates.
- Chinnappan, M., & Forrester, T. (2014). Generating procedural and conceptual knowledge of fractions by pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 871-896.
- Cowan, R., & Renton, M. (1996). Do they know what they are doing? Children's use of economical addition strategies and knowledge of commutativity. *Educational Psychology*, 16, 407-420.
- Crooks, N., Alibali, M. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review*; 34(4), 344-377.
- Dixon, J., & Moore, F. (1996). The development of intuitive principles in choosing mathematical strategies. *Developmental Psychology*, 32, 241-253.
- Dubé, A. (2014). Adolescents' understanding of inversion and associativity. *Learning and Individual Differences*, 36, 49-59.
- Dubé, A., & Robinson, K. (2010). The relationship between adults' conceptual understanding of inversion and associativity. *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale*, 64(1), 60-66.
- Fayol, M., & Thevenot, C. (2012). The use of procedural knowledge in simple addition and subtraction problems. *Cognition*, 123(3), 392-403.
- Farrington-Flint, L., Canobi, K. H., Wood, C., & Faulkner, D. (2007). The role of relational reasoning in children's addition concepts. *British Journal of Developmental Psychology*, 25(2), 227-246.
- Fuson, K. (1988). *Children's counting and concepts of number*. Springer-Verlag Publishing.
- Frye, D., Braisby, N., Lowe, J., Maroudas, C., & Nicholls, J. (1989). Young children's understanding of counting and cardinality. *Child Development*, 60, 1158-1171.
- Gagné, R.M. (1968). Contributions of Learning to human Development. *Psychological Review*, 75, 177-191.
- Gelman, R., & Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: Principles before skill. *Cognition*, 13, 343-359.
- Gelman, R., & Meck, E. (1986). The Notion of Principle: The Case of Counting. In Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case for Mathematics* (pp. 29-57). Hillsdale. N.J: Erlbaum.

- Gilmore, C., & Bryant, P. (2006). Individual differences in children's understanding of inversion and arithmetical skill. *British Journal of Educational Psychology*, 76, 309-331.
- Gilmore, C., & Bryant, P. (2008). Can children construct inverse relations in arithmetic? Evidence for individual differences in the development of conceptual understanding and computational skill. *British Journal of Developmental Psychology*, 26(3), 301-316.
- Gilmore, C., & Papadatou-Pastou, M. (2009). Patterns of individual differences in conceptual understanding and arithmetical skill: A meta-analysis. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 25-40.
- Gilmore, C. & Spelke, E. (2008). Children's understanding of the relationship between addition and subtraction. *Cognition*, 107(3), 932-945.
- Gray, E.M., & Tall, D.O. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. *Proceedings of PME XV*, vol. II, pp. 72-79. Assisi, Italy.
- Gray, E.M., & Tall, D.O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 116-140.
- Groth, R., & Bergner, J. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(1), 37-63.
- Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102(2), 395-406.
- Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P., & Thorpe, C. (2012). Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113(4), 469-486.
- Hecht, S., Close, L., & Santisi, M. (2003). Sources of individual differences in fraction skills. *Journal of Experimental Child Psychology*, 86(4), 277-302.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986): Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics* (pp.1-27). Hillsdale. NJ:Lawrence Associates.
- Hiebert, J., & Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, 14(3), 251- 283.

- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- LeFevre, J., Greenham, S., & Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction, 11*(2), 95-132.
- LeFevre, J., Smith-Chant, B., Fast, L., Skwarchuk, S., Sargla, E., Arnup, J., Penner-Wilger, M., Bisanz, J., & Kamawar, D. (2006). What counts as knowing? The Development of conceptual and procedural knowledge of counting from kindergarten through grade 2. *Journal of Experimental Child Psychology, 93*(4), 285-303.
- Matthews, P., & Rittle-Johnson, B. (2009). In pursuit of knowledge: Comparing self-explanations, concepts, and procedures as pedagogical tools. *Journal of Experimental Child Psychology, 104*(1), 1-21.
- Oyarzún, C., & Salvo, S. (2010). Conocimiento conceptual y dificultades en la resolución de problemas verbales aritméticos en el nivel inicial. *Revista de Estudios y Experiencias en Educación, 9*(18), 13-33.
- Patel, P., & Canobi, K. (2010). The role of number words in preschoolers' addition concepts and problem-solving procedures. *Educational Psychology, 30*(2), 107-124.
- Peled, I., & Segalis, B. (2005). It's not too late to conceptualize: Constructing a generalized subtraction schema by abstracting and connecting procedures. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 207-230.
- Prather, R., & Alibali, M. (2009). The development of arithmetic principle knowledge: How do we know what learners know? *Developmental Review, 29*(4), 221-248.
- Prather, R., & Alibali, M. (2011). Children's acquisition of arithmetic principles: The role of experience. *Journal of Cognition and Development, 12*(3), 332-354.
- Rayner, V., Pitsolantis, N., & Osana, H. (2009). Mathematics anxiety in preservice teachers: Its relationship to their conceptual and procedural knowledge of fractions. *Mathematics Education Research Journal, 21*(3), 60-85.
- Riley, M., Greene, J., & Heller, J. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. Ginsberg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking*. New York: Academic Press.

- Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology*, 91(1), 175.
- Rittle-Johnson, B., & Kmicikewycz, A. (2008). When generating answers benefits arithmetic skill: The importance of prior knowledge. *Journal of Experimental Child Psychology*, 101(1), 75-81.
- Rittle-Johnson, B., & Koedinger, K. (2009). Iterating between lessons concepts and procedures can improve mathematics knowledge. *British Journal of Educational Psychology*, 79, 483-500.
- Rittle-Johnson, B. & Schneider, M. (2014). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. To appear in R. Cohen Kadosh & A. Dowker (Eds.), *Oxford Handbook of Numerical Cognition*. Oxford University Press.
- Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), *The Development of Mathematical Skills* (pp.75-110). Hove, United Kingdom: Psychology Press.
- Rittle-Johnson, B., Siegler, R., & Alibali, M. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 346.
- Rittle-Johnson, B., & Star, J. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations. *Journal of Educational Psychology*, 99(3), 561-574.
- Rittle-Johnson, B., & Star, J. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101(3), 529.
- Rittle-Johnson, B., Star, J., & Durkin, K. (2009). The importance of prior knowledge when comparing examples: Influences on conceptual and procedural knowledge of equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101(4), 836-852.
- Rittle-Johnson, B., Star, J., & Durkin, K. (2012). Developing procedural flexibility: Are novices prepared to learn from comparing procedures? *British Journal of Educational Psychology*, 82(3), 436-455.
- Robinson, K., & Dubé, A. (2009). Children's understanding of addition and subtraction concepts. *Journal of Experimental Child Psychology*, 103(4), 532-545.



- Robinson, K., & LeFevre, J. (2012). The inverse relation between multiplication and division: Concepts, procedures, and a cognitive framework. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 409-428.
- Robinson, K., & Ninowski, J. (2003). Adults' understanding of inversion concepts: How does performance on addition and subtraction inversion problems compare to performance on multiplication and division inversion problems? *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale*, 57(4), 321-330.
- Robinson, K., Ninowski, J., & Gray, M. (2006). Children's understanding of the arithmetic concepts of inversion and associativity. *Journal of Experimental Child Psychology*, 94(4), 349-362.
- Siegler, R. (1991). In young children's counting, procedures precede principles. *Educational Psychology Review*, 3(2), 127-135.
- Siegler, R., & Araya, R. (2005). A computational model of conscious and unconscious strategy discovery. *Advances in Child Development and Behavior*, 33, 1-42.
- Siegler, R., & Crowley, K. (1994). Constraints on learning in nonprivileged domains. *Cognitive Psychology*, 27(2), 194-226.
- Siegler, R., & Stern, E. (1998). Conscious and unconscious strategy discoveries: A microgenetic analysis. *Journal of Experimental Psychology: General*, 127(4), 377-397.
- Schneider, M. (2012). Commentary 2: knowledge integration in mathematics learning: the case of inversion. *Educational Studies in Mathematics*, 79(3), 447-453.
- Schneider, M., & Hardy, I. (2000). Profiles of inconsistent knowledge in children's pathways of conceptual change. *Developmental Psychology*, 49(9), 1639-1649.
- Schneider, M., Rittle-Johnson, B., & Star, J. (2011). Relations Among Conceptual Knowledge, Procedural Knowledge, and Procedural Flexibility in Two Samples Differing in Prior Knowledge. *Developmental Psychology*, 47(6), 1525-1538.
- Schneider, M., & Stern, E. (2005). Conceptual and procedural knowledge of a mathematics problem: Their measurement and their causal interrelations. In B. G. Bara, L. Barsalou, & M. Bucciarelli (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the Cognitive Science Society* (pp. 341-347). Mahwah, NJ: Erlbaum.



- Schneider, M., & Stern, E. (2009). The inverse relation of addition and subtraction: A knowledge integration perspective. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 92-101.
- Schneider, M., & Stern, E. (2010). The developmental relations between conceptual and procedural knowledge: A multimethod approach. *Developmental Psychology*, 46(1), 178-192.
- Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3), 9-15.
- Star, J. (2000). On the relationship between knowing and doing in procedural learning. In B. Fishman & S. O'Connor-Divelbiss (Eds.), *Fourth international conference of the learning sciences (pp. 80-86)*. Michigan.
- Star, J. (2002). Re-conceptualizing procedural knowledge: The emergence of «intelligent» performances among equation solvers. In D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant & K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 999-1007)*. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Star, J. (2005). Reconceptualizing procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 404-411.
- Star, J. (2007). Foregrounding procedural knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education* 38(2), 132-135.
- Star, J., & Newton, K. (2009). The nature and development of experts' strategy flexibility for solving equations. *ZDM: International Journal of Mathematics Education*, 41(5), 557-567.
- Star, J., & Rittle-Johnson, B. (2009). It pays to compare: An experimental study on computational estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 102(4), 408-426.
- Star, J., & Seifert, C. (2006). The development of flexibility in equation solving. *Contemporary Educational Psychology*, 31(3), 280-300.
- Star, J., & Stylianides, G. (2000). Procedural and conceptual knowledge: exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(2), 169-181.
- Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in

elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 24(3), 335-359.

Wynn, K. (1990). Children's understanding of counting. *Cognition*, 36(2), 155-193.

**Contact address:** Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad Autónoma de Barcelona, 08193 Bellaterra (Barcelona), España. E-mail: a.castro.inostroza@gmail.com